Karlsruher Institut für Technologie | Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Moderne Theoretische Physik IIIa   WS 18/19

Prof. Dr. Alexander Mirlin
Dr. Stefan Rex

Blatt 3
Besprechung: 20.11.2018

---

1. Maxwell-Relationen (2 + 5 + 7 = 14 Punkte)

(a) Gegeben seien vier thermodynamische Größen a, b, c, d, die eine Maxwell-Relation der Form

$$\left(\frac{\partial a}{\partial b}\right)_c = \left(\frac{\partial d}{\partial c}\right)_b$$

erfüllen. Schreiben Sie die Maxwell-Realation mithilfe von Jacobi-Determinanten!

(b) Zeigen Sie, dass für ein System mit der Magnetisierung M im äußeren Magnetfeld B die Relation

$$\frac{c_M}{c_B} = \frac{\chi_S}{\chi_T}$$

gilt, wobei

$$c_M = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_M , \quad c_B = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_B, \quad \chi_S = \left(\frac{\partial M}{\partial B}\right)_S, \quad \chi_T = \left(\frac{\partial M}{\partial B}\right)_T .$$

(c) Beweisen Sie die Relation

$$c_B - c_M = T\frac{\alpha_B^2}{\chi_T}$$

mit dem Temperaturkoeffizienten der Magnetisierung

$$\alpha_B = \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_B .$$

Für die Arbeit bei Änderung des Magnetfeldes gilt $\delta W = MdB$.
Hinweis: Verfahren Sie so wie in der Vorlesung für $c_P - c_V$.

2. Thermodynamische Potentiale (9 + 9 = 18 Punkte)

Ein System (im Gleichgewicht) lässt sich durch ein beliebiges thermodynamisches Potential vollständig beschreiben, was hier an zwei Beispielen demonstriert werden soll:

(a) Die freie Enthalpie $G(T, P)$ eines Systems bei konstanter Teilchenzahl sei bekannt. Bestimmen Sie die isochore Wärmekapazität c_V,

$$c_V = T\left(\frac{\partial S(T, V)}{\partial T}\right)_V .$$

Der Ausdruck für c_V soll nur Ableitungen von G enthalten.

(b) Nun sei die Enthalpie $H(S,P)$ bei konstanter Teilchenzahl bekannt. Leiten Sie die isotherme Kompressibilität κ_T her! Diese ist definiert durch

$$\kappa_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T .$$

3. Dehnbarer Zylinder (8 + 5 + 5 = 18 Punkte)

Wir betrachten die Streckung eines dünnen elastischen Zylinders von der Länge L_0 auf die Länge L in axialer Richtung durch eine Kraft f. Dabei genügt f der thermodynamischen Zustandsgleichung

$$f = \gamma T\left[\frac{L}{L_0} - \left(\frac{L_0}{L}\right)^2\right] ,$$

wobei γ eine Materialkonstante ist. Von dem Zylinder sind außerdem der thermische Ausdehnungskoeffizient bei $f = 0$,

$$\alpha_0 = \frac{1}{L_0}\frac{\partial L_0}{\partial T} ,$$

der die Temperaturabhängigkeit von $L_0(T)$ beschreibt, sowie die Wärmekapazität bei konstanter Länge,

$$c_L = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_L ,$$

bekannt.

(a) Bestimmen Sie die Änderung der Entropie des Zylinders, ΔS, in Abhängigkeit von γ, T, L, L_0 und α_0!
Hinweis: Beginnen Sie mit dem aus der Vorlesung bekannten Differential dF. Überlegen Sie, wie das Element der Arbeit durch die Kraft f ausgedrückt werden muss und welches Vorzeichen die Arbeit hat.

(b) Wie viel Wärme wird bei isothermer Streckung auf die doppelte Länge ausgetauscht? Wird die Wärme aufgenommen oder abgegeben?

(c) Nun wird die Streckung isentrop ausgeführt, wobei sich die Temperatur des Zylinders ändern kann. Berechnen Sie den thermoelastischen Koeffizienten

$$\vartheta_S = \left(\frac{\partial T}{\partial L}\right)_S ,$$

in Abhängigkeit von γ, L, L_0, T, α_0 und c_L. Nimmt die Temperatur bei einer Streckung zu oder ab?

Hinweis: Bei mehreren Aufgaben auf diesem Blatt kann Aufgabe 5 von Blatt 1 von Nutzen sein.