

## Moderne Theoretische Physik IIIa WS 18/19

Prof. Dr. Alexander Mirlin  
Dr. Stefan RexLösungen zu Blatt 7  
Besprechung: 29.01.2019

## 1. Prinzip der maximalen Entropie in einem Quantengas (7+7+7=21 Punkte)

In dieser Aufgabe wird die Entropie eines idealen Quantengas in einem beliebigen Zustand des Systems (der im Allgemeinen kein Gleichgewichtszustand ist) diskutiert. Dabei soll gezeigt werden, dass die Bose- und Fermi-Verteilungsfunktionen aus dem Prinzip der maximalen Entropie abgeleitet werden können.

Wir betrachten ein Quantengas aus  $N \gg 1$  nichtwechselwirkenden Bosonen oder Fermionen. Wir wählen ein Energie-Fenster  $\Delta E$ , so dass  $\Delta E$  klein im Vergleich zur Gesamtenergie  $E$  des Systems ist. Dann kann man Einteilchen-Zustände  $\lambda$  mit Energien  $j\Delta E < \epsilon_\lambda < (j+1)\Delta E$  zur Gruppe  $j$  zusammenfassen. Jede Gruppe enthält  $\nu_j \gg 1$  Einteilchen-Zustände, die von  $N_j \gg 1$  Teilchen besetzt werden. Die Entropie des makroskopischen Zustands ist dann durch die Verteilung auf die einzelnen Gruppen gegeben:

$$S = k_B \sum_j \ln [\Gamma_j(N_j)]$$

Hier ist  $\Gamma_j(N_j)$  die Anzahl der Möglichkeiten  $N_j$  Teilchen auf die  $\nu_j$  Zustände in Gruppe  $j$  zu verteilen.

- (a) Berechnen Sie  $\Gamma_j(N_j)$  und die Entropie für Fermionen. Drücken Sie Ihr Ergebnis in Abhängigkeit von  $\nu_j$  und der mittleren Teilchenzahl der Gruppe  $j$ ,  $n_j = N_j/\nu_j$ , aus.

**Lösung:**

Wir betrachten die  $j$ -te Gruppe von Zuständen. Das heißt, dass wir  $N_j$  Fermionen in  $\nu_j$  Zustände platzieren müssen. Jeder Zustand kann nur durch ein Fermion besetzt werden. Deshalb ist die Anzahl der Möglichkeiten die Fermionen zu platzieren gleich der Anzahl an Möglichkeiten  $N_j$  Zustände aus den  $\nu_j$  verfügbaren Zuständen auszuwählen:

$$\Gamma_j(N_j) = \frac{\nu_j!}{N_j!(\nu_j - N_j)!} \quad (1)$$

Wir können daher die Entropie mit der asymptotischen Näherung

$$\ln n! \approx n \ln n - n, \quad n \gg 1. \quad (2)$$

schreiben als

$$\begin{aligned}
S &= k_B \sum_j \ln [\Gamma_j(N_j)] \\
&= k_B \sum_j [\nu_j \ln \nu_j - N_j \ln N_j - (\nu_j - N_j) \ln(\nu_j - N_j) - \nu_j + N_j + (\nu_j - N_j)] \\
&= k_B \sum_j [(\nu_j - N_j + N_j) \ln \nu_j - N_j \ln N_j - (\nu_j - N_j) \ln(\nu_j - N_j)] = \\
&= -k_B \sum_j \left[ N_j \ln \frac{N_j}{\nu_j} + (\nu_j - N_j) \ln \frac{\nu_j - N_j}{\nu_j} \right] \\
&= -k_B \sum_j \nu_j [n_j \ln n_j + (1 - n_j) \ln(1 - n_j)]. \quad (3)
\end{aligned}$$

(b) Wiederholen Sie die Rechnung aus der Aufgabe (a) für Bosonen.

**Lösung:**

Im Fall von Bosonen kann jeder Zustand maximal  $N_j$ -fach besetzt sein. Die Anzahl der Möglichkeiten,  $N_j$  Bosonen in  $\nu_j$  Zustände zu verteilen ist identisch zur Anzahl der Möglichkeiten,  $N_j$  identische Bälle in  $\nu_j$  Boxen zu verteilen.

Das erste Element muss eine Box (Zustand) sein. Dann bleiben  $N_j + \nu_j - 1$  Elemente, die in irgendeiner Weise angeordnet werden müssen. Allerdings sind die Anordnungen identisch, die durch Permutation von Boxen oder durch Permutation von Bällen ineinander überführt werden können, wir müssen deshalb durch die Anzahl möglicher Permutationen  $N_j!$  und  $(\nu_j - 1)!$  teilen. Damit

$$\Gamma_j(N_j) = \frac{(N_j + \nu_j - 1)!}{N_j!(\nu_j - 1)!} \quad (4)$$

Wir berechnen die Entropie analog zur vorherigen Teilaufgabe. Das Ergebnis lautet

$$S = k_B \sum_j \nu_j [(1 + n_j) \ln(1 + n_j) - n_j \ln n_j]. \quad (5)$$

(c) Bei festgehaltenen  $E$  und  $N$  benutzen Sie das Prinzip der maximalen Entropie im Gleichgewicht um die Fermi- und Bose-Verteilungsfunktionen zu erhalten.

**Lösung:**

Um die Fermi- und Bose-Statistik aus dem Prinzip der maximalen Entropie herzuleiten, beginnen wir mit

$$S = -k_B \sum_j \nu_j [n_j \ln n_j + (1 - n_j) \ln(1 - n_j)] \quad (6)$$

Wir halten die Gesamtteilchenzahl  $\sum_j N_j = \sum_j \nu_j n_j$  und die Gesamtenergie  $\sum_j E_j \nu_j n_j$  in unserem System fest und benutzen Lagrangemultiplikatoren um diese Randbedingungen in Betracht zu ziehen, insbesondere müssen wir

$$-k_B \sum_j \nu_j [n_j \ln n_j + (1 - n_j) \ln(1 - n_j)] - \lambda_N \left( \sum_j \nu_j n_j - N \right) - \lambda_E \left( \sum_j \nu_j E_j n_j - E \right). \quad (7)$$

maximieren. Ableiten nach  $n_j$  führt zu

$$-\ln n_j + \ln(1 - n_j) - \frac{\lambda_N}{k_B} - E_j \frac{\lambda_E}{k_B} = 0. \quad (8)$$

Die Lösung

$$n_j = \frac{1}{1 + \exp(\lambda_N/k_B + E_j \lambda_E/k_B)} \quad (9)$$

ist die Fermi-Verteilung mit der Temperatur  $T = 1/\lambda_E$  und chemischen Potential  $\mu = -T\lambda_N$ .

Die Betrachtung der Bose-Verteilung ist komplett analog.

## 2. Bosegas: chemisches Potential

(10 Punkte)

In einem Bosegas bildet sich unterhalb einer kritischen Temperatur  $T_c$  ein Bose-Einstein-Kondensat. Das chemische Potential ist dann  $\mu = 0$ . Durch welchen Zusammenhang wird  $\mu$  für  $T > T_c$  festgelegt? Zeigen Sie, dass für Temperaturen etwas oberhalb von  $T_c$  das chemische Potential mit  $\mu \propto -(T - T_c)^2$  skaliert (bei konstanter Teilchendichte  $n$ ).

**Lösung:** Für  $T > T_c$  existiert kein geschlossener analytischer Ausdruck für  $\mu(T)$ . Das chemische Potential bei einer gegebenen Temperatur wird implizit durch die Bedingung

$$n = \frac{g_{3/2}(z)}{\lambda(T)^3} = \frac{1}{\lambda(T)^3} \sum_{j=1}^{\infty} j^{-3/2} e^{\beta \mu j}$$

aus der Vorlesung festgelegt. In der Nähe der kritischen Temperatur,  $(T - T_c)/T_c \ll 1$ , können wir für  $\mu(T)$  eine Potenzreihenentwicklung annehmen:

$$\mu(T) = \mu(T_c) + \left( \frac{\partial \mu}{\partial T} \right)_{T=T_c} (T - T_c) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \mu}{\partial T^2} \right)_{T=T_c} (T - T_c)^2 + \dots$$

Wir wissen bereits, dass  $\mu(T_c) = 0$ . Nun ist noch zu zeigen, dass der lineare Term verschwinden muss. Dafür leiten wir die implizite Gleichung für  $\mu(T)$  nach der Temperatur ab:

$$\begin{aligned} n \frac{d}{dT} \lambda(T)^3 &= \sum_{j=1}^{\infty} j^{-3/2} \frac{d}{dT} \exp\left(\frac{j\mu(T)}{k_B T}\right) \\ \Rightarrow \underbrace{-\frac{3n}{2} \left(\frac{2\pi\hbar^2}{mk_B}\right)^{3/2}}_{=:K} \frac{1}{T^{5/2}} &= \frac{1}{k_B T} \left( \frac{d\mu}{dT} - \frac{\mu}{T} \right) g_{1/2}(z) \\ \Rightarrow -\frac{k_B K}{(\sqrt{T})^3} &= \left( \frac{d\mu}{dT} - \frac{\mu}{T} \right) g_{1/2}(z) \end{aligned}$$

In der Nähe des Übergangs,  $T \rightarrow T_c$ , gilt  $\mu \rightarrow 0$  und damit  $z \rightarrow 1$ . Die Polylogarithmusfunktion  $g_{1/2}$  ist in diesem Limes divergent,  $g_{1/2}(z) \rightarrow \infty$ . Die obige Gleichung kann also nur unter der Bedingung erfüllt sein, dass

$$\lim_{T \rightarrow T_c} \left( \frac{d\mu}{dT} - \frac{\mu}{T} \right) = 0,$$

denn auf der linken Gleichungsseite erhält man im Grenzwert eine Konstante. Also

$$\left(\frac{d\mu}{dT}\right)_{T=T_c} = \lim_{T \rightarrow T_c} \frac{\mu(T)}{T} = \frac{\mu(T_c)}{T_c} = 0.$$

Folglich ist der führende Term der Temperaturabhängigkeit des chemischen Potentials nahe  $T_c$  zweiter Ordnung.

### 3. Planck'sche Strahlung

(7 + 3 + 5 = 15 Punkte)

- Für die elektromagnetische Strahlung in einem Volumen  $V_1$  habe die Planck'sche Strahlungskurve ihr Maximum bei der Frequenz  $\omega_1$ . Nun wird das Volumen adiabatisch auf  $V_2 = 2V_1$  ausgedehnt. Bei welcher Frequenz  $\omega_2$  liegt nun das Strahlungsmaximum?
- Die kosmische Hintergrundstrahlung hat eine Temperatur von etwa 3 K. Wie viel Energie enthält die Hintergrundstrahlung pro Kubikmeter?
- Die Energie der Planck'schen Strahlung ist proportional zu  $T^\alpha$ . Welchen Wert hat  $\alpha$  in einem  $n$ -dimensionalen Universum?

#### Lösung

- Aus der Vorlesung ist bekannt, dass

$$P = \frac{\pi^2 (k_B T)^4}{45 (\hbar c)^3} = \frac{1}{3} \frac{U}{V},$$

also  $U = 3PV$  und  $P \propto T^4$ . Es gilt  $dU = TdS - PdV$ , also ist für einen adiabatischen ( $dS = 0$ ) Prozess

$$dU = 3V \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_S dV + 3PdV = -PdV \Rightarrow \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_S = -\frac{4P}{3V}$$

und daher  $P^3 V^4 = \text{konstant}$  bzw., mit  $P \propto T^4$ ,  $VT^3 = \text{konstant}$ . Nach der Verdopplung des Volumens ist die Temperatur folglich von ursprünglich  $T_1$  auf den Wert

$$T_2 = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{1/3} T_1 = 2^{-1/3} T_1$$

gesunken. Nach dem Wien'schen Verschiebungsgesetz ist  $\omega_{\max}$  proportional zu  $T$ , also  $\omega_2 = 2^{-1/3} \omega_1$ .

- Vorlesung:  $U = V \frac{\pi^2 (k_B T)^4}{15 (\hbar c)^3}$ . Für  $T = 3$  K erhält man  $\frac{U}{V} = 6 \cdot 10^{-14} \frac{\text{J}}{\text{m}^3} = 375 \frac{\text{keV}}{\text{m}^3}$ .

- Energie in  $n$  Dimensionen:

$$E = \sum_{\underbrace{\sigma}_2} \int \underbrace{d^n x}_V \int \frac{d^n p}{(2\pi\hbar)^n} \frac{\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}$$

mit  $p = \hbar\omega/c$ , also

$$E = 2V \left(\frac{k_B}{2\pi\hbar c}\right)^n k_B \int d^n w \frac{w}{e^w - 1} T^{n+1}$$

mit der Substitution  $w = \beta\hbar\omega$ . Ohne das Integral ausführen zu müssen, haben wir somit bereits die Potenz der Temperatur,  $\alpha = n + 1$ .

#### 4. Zustandsdichte

(4 Punkte + 15 Bonuspunkte)

Berechnen Sie die Zustandsdichte

$$\nu(\varepsilon) = \int \frac{d^n p}{(2\pi\hbar)^n} \delta(\varepsilon - \varepsilon_{\mathbf{p}})$$

für die folgenden Dispersionsrelationen:

(a)  $\varepsilon_{\mathbf{p}} = a|\mathbf{p}|$  mit einer Konstante  $a$ , in den Dimensionen  $n = 1, 2, 3$

(b) **(15 Bonuspunkte)**  $\varepsilon_{\mathbf{p}} = \sqrt{\left(\frac{|\mathbf{p}|^2}{2m} - \mu\right)^2 + \Delta^2}$  mit Konstanten  $\mu, m, \Delta > 0$  in 3 Dimensionen. Untersuchen Sie insbesondere das Verhalten von  $\nu(\varepsilon)$  bei den Energien  $\varepsilon_1 = \Delta$  und  $\varepsilon_2 = \sqrt{\mu^2 + \Delta^2}$ . Skizzieren Sie die Dispersionsrelation und die Zustandsdichte.

#### Lösung:

(a) Eindimensional:

$$\nu(\varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} \delta(\varepsilon - a|p|) = \frac{2}{2\pi\hbar a} \int_0^{\infty} dp \delta\left(p - \frac{\varepsilon}{a}\right) = \frac{1}{\pi\hbar a} \quad \text{konst. für alle } \varepsilon > 0$$

Zweidimensional:

$$\nu(\varepsilon) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{d^2 p}{(2\pi\hbar)^2} \delta(\varepsilon - a|\mathbf{p}|) = \frac{2\pi}{(2\pi\hbar)^2 a} \int_0^{\infty} dp p \delta\left(p - \frac{\varepsilon}{a}\right) = \frac{2\pi}{(2\pi\hbar)^2} \frac{\varepsilon}{a^2}$$

Dreidimensional:

$$\nu(\varepsilon) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} \delta(\varepsilon - a|\mathbf{p}|) = \frac{4\pi}{(2\pi\hbar)^3 a} \int_0^{\infty} dp p^2 \delta\left(p - \frac{\varepsilon}{a}\right) = \frac{4\pi}{(2\pi\hbar)^3} \frac{\varepsilon^2}{a^3}$$

(b) Hier müssen drei Fälle unterschieden werden, je nachdem wie viele Werte des Impulses die Energie  $\varepsilon$  liefern:

$$\begin{aligned} \nu(\varepsilon) &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} \delta\left(\varepsilon - \sqrt{\left(\frac{|\mathbf{p}|^2}{2m} - \mu\right)^2 + \Delta^2}\right) \\ &= \frac{4\pi}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{\infty} dp p^2 \begin{cases} 0 & \varepsilon < \Delta \\ \frac{\delta(p-p_+)}{\left|\frac{\partial \varepsilon_p}{\partial p}\right|_{p=p_+}} + \frac{\delta(p-p_-)}{\left|\frac{\partial \varepsilon_p}{\partial p}\right|_{p=p_-}} & \Delta \leq \varepsilon \leq \sqrt{\mu^2 + \Delta^2} \\ \frac{\delta(p-p_+)}{\left|\frac{\partial \varepsilon_p}{\partial p}\right|_{p=p_+}} & \varepsilon > \sqrt{\mu^2 + \Delta^2} \end{cases} \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} p_{\pm} &= \sqrt{2m \left(\mu \pm \sqrt{\varepsilon^2 - \Delta^2}\right)} \\ \left|\frac{\partial \varepsilon_p}{\partial p}\right|_{p=p_{\pm}} &= \frac{\sqrt{\varepsilon^2 - \Delta^2}}{\varepsilon} \sqrt{\frac{2(\mu \pm \sqrt{\varepsilon^2 - \Delta^2})}{m}} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich die Zustandsdichte:

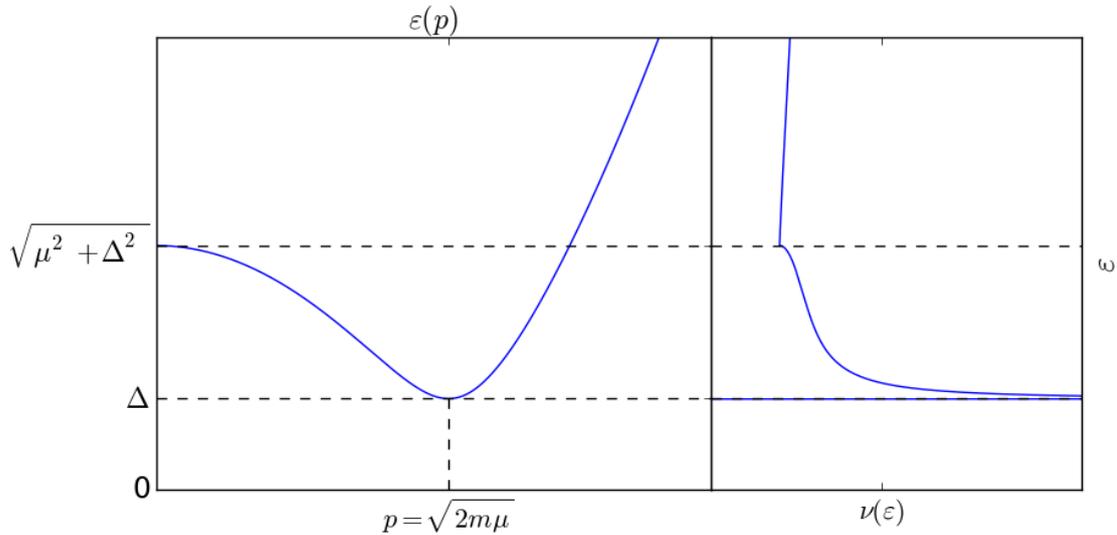
$$\nu(\varepsilon) = \frac{m^{3/2}}{\sqrt{2\pi^2\hbar^3}} \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 - \Delta^2}} \begin{cases} 0 & \varepsilon < \Delta \\ \left[ \sqrt{\mu + \sqrt{\varepsilon^2 - \Delta^2}} + \sqrt{\mu - \sqrt{\varepsilon^2 - \Delta^2}} \right] & \Delta \leq \varepsilon \leq \sqrt{\mu^2 + \Delta^2} \\ \sqrt{\mu + \sqrt{\varepsilon^2 - \Delta^2}} & \varepsilon > \sqrt{\mu^2 + \Delta^2} \end{cases}$$

Für  $\varepsilon = \varepsilon_1$  divergiert die Zustandsdichte. An  $\varepsilon = \varepsilon_2$  ist  $\nu(\varepsilon)$  endlich, aber nicht differenzierbar. Wir berechnen dafür noch die Ableitung der Zustandsdichte in der Nähe von  $\varepsilon_2$  (linksseits):

$$\begin{aligned} \frac{d\nu(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \frac{m^{3/2}}{\sqrt{2\pi^2\hbar^3}} & \left\{ \frac{\left( \sqrt{\mu + \sqrt{\varepsilon^2 - \Delta^2}} + \sqrt{\mu - \sqrt{\varepsilon^2 - \Delta^2}} \right)}{\sqrt{\varepsilon^2 - \Delta^2}} \left( 1 - \frac{\varepsilon^2}{(\varepsilon^2 - \Delta^2)} \right) \right. \\ & \left. - \frac{\varepsilon^2}{2(\varepsilon^2 - \Delta^2)^2} \left( \frac{1}{\sqrt{\mu + \sqrt{\varepsilon^2 - \Delta^2}}} - \frac{1}{\sqrt{\mu - \sqrt{\varepsilon^2 - \Delta^2}}} \right) \right\} \end{aligned}$$

Bei  $\varepsilon_2$  ist  $\varepsilon^2 - \Delta^2 = \mu^2$ . Das liefert eine Divergenz im letzten Term, so dass

$$\left( \frac{d\nu(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right)_{\varepsilon \rightarrow \varepsilon_2} = -\infty$$



Dispersionsrelation (links) und Zustandsdichte (rechts).