Theorie der Kondensierten Materie I WS 2018/19

Prof. Dr. A. Shnirman
PD Dr. B. Narozhny, M.Sc. T. Lüdwig

Blatt 10
Lösungsvorschlag

---

1. Stoner-Instabilität I:

(a) Die Energieänderung im Magnetfeld

$$\delta\epsilon_{\boldsymbol{p}\sigma} = \sum_{\boldsymbol{p}',\sigma'} f_{\boldsymbol{p}\sigma,\boldsymbol{p}'\sigma'}\delta n_{\boldsymbol{p}'\sigma'} + \beta H \sigma^z_{\sigma\sigma}.$$

Here haben wir die Spin-Quantisierung Achse (z) in Richtung des Magnetfeldes gewählt. Natürlich

$$\sigma^z_{\sigma\sigma} \equiv \sigma = \pm 1.$$

Die Dichteänderung:

$$\delta n_{\boldsymbol{p}\sigma} = \frac{\partial n}{\partial \epsilon}\,\delta\epsilon_{\boldsymbol{p}\sigma}.$$

Deswegen:

$$\delta\epsilon_{\boldsymbol{p}\sigma} = \beta H\sigma + \sum_{\boldsymbol{p}',\sigma'} f_{\boldsymbol{p}\sigma,\boldsymbol{p}'\sigma'}\frac{\partial n}{\partial \epsilon}\,\delta\epsilon_{\boldsymbol{p}'\sigma'}.$$

Jetzt benutzen wir den expliziten Ausdrück für die Landau Funktion:

$$\delta\epsilon_{\boldsymbol{p}\sigma} = \beta H\sigma + \sum_{\boldsymbol{p}',\sigma'} \left[f^s_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}'} + \sigma\sigma' f^a_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}'}\right]\frac{\partial n}{\partial \epsilon}\,\delta\epsilon_{\boldsymbol{p}'\sigma'}.$$

Bie niedrigen Temperaturen

$$\frac{\partial n}{\partial \epsilon} = -\delta(\epsilon - \mu).$$

Die Impulse $\boldsymbol{p}$ and $\boldsymbol{p}'$ sind dann in der Nähe der Fermi-Kante. Die Integration über die Impulse ist dann trivial

$$\sum_{\boldsymbol{p}'} \left[f^s_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}'} + \sigma\sigma' f^a_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}'}\right]\delta(\epsilon_{\boldsymbol{p}'\sigma'} - \mu)\delta\epsilon_{\boldsymbol{p}'\sigma'} = \frac{1}{2}\rho_F \int \frac{d\Omega}{4\pi}\left[f^s(\theta) + \sigma\sigma' f^a(\theta)\right]\delta\epsilon_{p_F,\sigma'},$$

wobei ρ_F ist die Zustandsdichte an der Fermi Kante.
Führen wir die folgende Konstante ein:

$$F_0^{s(a)} = \rho_F \int \frac{d\Omega}{4\pi} f^{s(a)}(\theta).$$

Dann die Gleichung für die Energieänderung:

$$\delta\epsilon_{p_F\sigma} = \beta H\sigma - \frac{1}{2}\sum_{\sigma'}\left[F_0^s + \sigma\sigma' F_0^a\right]\delta\epsilon_{p_F,\sigma'}.$$

(b) Nehmen wir an, dass

$$\delta\epsilon_{p_F,\sigma} = A\beta H\sigma.$$

Die Gleichung für A ist

$$A\beta H\sigma = \beta H\sigma - A\beta\frac{1}{2}\sum_{\sigma'}\sigma'\left[F_0^s + \sigma\sigma' F_0^a\right].$$

Jetzt können wir die Summe berechnen:

$$\sum_{\sigma'}\sigma' F_0^s = 0,$$

$$\sum_{\sigma'}\sigma'\sigma\sigma' F_0^a = 2\sigma F_0^a,$$

und zwar

$$A = 1 - AF_0^a,$$

sodass

$$A = \frac{1}{1+F_0^a},$$

und letztendlich

$$\delta\epsilon_{p_F,\sigma} = \frac{\beta H\sigma}{1+F_0^a}.$$

(c) Die Magnetisierung:

$$M = -\beta\sum_{\boldsymbol{p},\sigma}\sigma\delta n_{\boldsymbol{p},\sigma} = \frac{1}{2}\beta\rho_F\sum_{\sigma}\sigma\delta\epsilon_{p_F,\sigma}.$$

Benutzen wir jetzt das Ergebnis von 1(b):

$$M = \frac{\beta^2\rho_F H}{1+F_0^a}.$$

Die Suszebilität:

$$M = \chi H.$$

Ohne Wechselwirkung:

$$M = \chi_{Pauli}H,$$

mit der Pauli-Suszebilität

$$\chi_{Pauli} = \beta^2\rho_F.$$

Jetzt:

$$M = \frac{\chi_{Pauli}}{1+F_0^a}H \quad \Rightarrow \quad \chi = \frac{\chi_{Pauli}}{1+F_0^a}.$$

Die Suszebilität divirgiert wenn

$$F_0^a = -1.$$

Das ist das Stoner-Kriterium. An diesem Punkt ist die Suszebilität unendlich bei sehr kleinem Magnetfeld. Deswegen haben wir $M \neq 0$, d.h. ein Ferromagnet.

2. Stoner-Instabilität II:

(a) Die Energie eines Quasi-Teilchens:

$$\epsilon_{\boldsymbol{p}\sigma} = \epsilon_0 - b(\boldsymbol{p})\boldsymbol{\sigma m}.$$

Die kleine Drehung des Vektors $\boldsymbol{m}$

$$\delta\boldsymbol{m} = [\boldsymbol{\delta\theta} \times \boldsymbol{m}],$$

wobei $\delta\theta$ der kleine Drehwinkel ist. Der Vektor $\boldsymbol{\delta\theta}$ ist senkrecht zur Drehebene. Die entsprechende Energieänderung

$$\delta\epsilon = -b(\boldsymbol{p})\,[\boldsymbol{m\sigma}]\,\delta\theta.$$

Auf der anderen Seite, ändert sich auch die Dichte:

$$\delta n = \frac{1}{2}\left(n^+ - n^-\right)[\boldsymbol{m\sigma}]\,\delta\theta.$$

Dadurch ändert sich die Energie:

$$\delta\epsilon = \sum_{\boldsymbol{p}'\sigma'} f_{\boldsymbol{p}\sigma,\boldsymbol{p}'\sigma'}\delta n_{\boldsymbol{p}'\sigma'} = \frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{p}'\sigma'} f_{\boldsymbol{p}\sigma,\boldsymbol{p}'\sigma'}\left(n^+ - n^-\right)[\boldsymbol{m\sigma}']\,\delta\theta.$$

Jetzt benutzen wir den expliziten Ausdrück für die Landau Funktion:

$$\delta\epsilon = \frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{p}'\sigma'}\left[f^s_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}'} + \sigma\sigma' f^a_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}'}\right]\left(n^+ - n^-\right)[\boldsymbol{m\sigma}']\,\delta\theta = [\boldsymbol{m\sigma}]\,\delta\theta\sum_{\boldsymbol{p}'} f^a_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}'}\left(n^+ - n^-\right).$$

Wir vergleichen die zwei Ergebnisse für die Energieänderung und wir finden

$$b(\boldsymbol{p}) = -\sum_{\boldsymbol{p}'} f^a_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}'}\left(n^+ - n^-\right).$$

(b) Um das Stoner-Kriterium herzuleiten, betrachten wir den Fall, wo b infinitesimal klein ist. Dann können wir die folgende Entwicklung benutzen:

$$n^+ - n^- \approx -2\left.\frac{\partial n}{\partial\epsilon}\right|_{\epsilon=\epsilon_0} b.$$

Dann

$$b(\boldsymbol{p}) = 2\sum_{\boldsymbol{p}'} f^a_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}'} b(\boldsymbol{p}')\frac{\partial n}{\partial\epsilon}.$$

Jetzt berechnen wir ähnlich wie in der Aufgabe 1:

$$b(p_F) = -F^a_0 b(p_F) \quad\Rightarrow\quad F^a_0 = -1.$$

3. Zweiatomige Harmonische Kette:

Die Lagrangefunktion explizit ausgeschrieben lautet

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \sum_n (\dot{u}_n^2 + \dot{s}_n^2) - \frac{K}{2} \sum_n (u_n - s_n)^2 - \frac{G}{2} \sum_n (u_{n+1} - s_n)^2$$

Mit Hilfe der Euler-Langrange-Gleichungen $\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}$ erhalten wir das gekoppelte Gleichungssystem

$$\begin{aligned} m\ddot{u}_n &= -u_n(K+G) + s_n K e^{ikd} + s_{n-1} G e^{ikd} \\ m\ddot{s}_n &= -s_n(K+G) + u_n K e^{-ikd} + u_{n+1} G e^{-ikd} \end{aligned}$$

Periodische Randbedingungen bedeutet $u_{n+N} = ue^{i(k(n+N)a-\omega t)} = u_n \rightarrow e^{ikNa} = 1$ oder

$$k = n\frac{2\pi}{Na} \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, ..$$

Wir setzen den Ansatz ein und schreiben das ganze als Matrixgleichung

$$\begin{pmatrix} K+G-m\omega^2 & -(K+Ge^{-ika})e^{ikd} \\ -(K+Ge^{ika})e^{-ikd} & K+G-m\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ s \end{pmatrix} = 0 \tag{1}$$

Eine nicht-triviale Lösung des Gleichungssystems (1) erfordert Det $= 0$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} (K+G-m\omega^2)^2 - (K+Ge^{-ika})(K+Ge^{ika}) &= 0 \\ \rightarrow (m\omega^2)^2 - 2(K+G)m\omega^2 + 4KG\sin^2 ka/2 &= 0 \end{aligned}$$

eine Gleichung zweiter Ordnung für $m\omega^2$, mit den Lösungen

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{(K+G) \pm \sqrt{(K+G)^2 - 4KG\sin^2 ka/2}}{m}$$

Für $ka \ll 1$ gilt $\sin ka/2 \approx ka/2$, und damit

$$\begin{aligned} \omega_{1,2}^2 &= \frac{(K+G) \pm (K+G)\sqrt{1 - \frac{KG}{(K+G)^2}(ka)^2}}{m} \\ &\approx (K+G) \pm (K+G)\left(1 - \frac{KG}{2(K+G)^2}(ka)^2\right) \end{aligned}$$

Die Eindeutigkeit der Lösung erfordert, dass k auf ein Intervall der Länge 2π beschränkt ist. Damit ergeben sich N erlaubte Werte für den Wellenvektor k oder insgesamt $2N$ Moden im System. (wie erwartet bei N Einheitszellen mit 2-atomiger Basis)