Karlsruher Institut für Technologie | Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Theorie der Kondensierten Materie I WS 2018/19

Prof. Dr. A. Shnirman
PD Dr. B. Narozhny, M.Sc. T. Lüdwig

Blatt 12
Lösungsvorschlag

---

1. Effektive Elektron-Elektron Wechselwirkung, Schrieffer-Wolf-Transformation:

(a) Betrachten wir die Taylor-Entwicklung:

$$e^S = 1 + S + \frac{1}{2}S^2 + \dots .$$

Jetzt:

$$\begin{aligned}\tilde{H} &= \left(1 - S + \frac{1}{2}S^2 + \dots\right) H \left(1 + S + \frac{1}{2}S^2 + \dots\right) \\ &= H + (HS - SH) + \left(\frac{1}{2}HS^2 + \frac{1}{2}S^2H - SHS\right) + \dots \\ &= H + [H, S] + \frac{1}{2}\left[[H, S], S\right] + \dots ,\end{aligned}$$

weil

$$\left[[H, S], S\right] = (HS - SH)\, S - S\, (HS - SH) = HS^2 - SHS + S^2H.$$

(b) Betrachten wir jetzt den Hamiltonoperator mit der Störung V:

$$\tilde{H} = e^{-S}\,(H + V)\, e^S = H + V + [(H + V), S] + \frac{1}{2}\left[[(H + V), S], S\right] + \dots .$$

Um die lineare Terme zu vernichten, wählen wir S als

$$V + [H, S] = 0. \tag{1}$$

Dann

$$S \sim V,$$

und

$$\tilde{H} = H + [V, S] + \frac{1}{2}\left[[H, S], S\right] + \mathcal{O}(V^3) = H + \frac{1}{2}[V, S] + \mathcal{O}(V^3).$$

(c) Die Matrixelemente von S finden wir aus der Gleichung (1):

$$\langle n| \left(V + [H,S]\right) |n\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{nm} + E_n S_{nm} - E_m S_{nm},$$

und zwar (wenn $E_n \neq E_m$)

$$S_{nm} = \frac{V_{nm}}{E_m - E_n}.$$

(d) Betrachten wir jetzt den Frölich Hamiltonoperator. Der Operator S erfüllt

$$H_{e-ph} + [H,S] = 0.$$

werten die Matrixelemente von S bezüglich der Phononzustände aus. Bei $T = 0$ sind nur zwei Matrizelemente wichtig:

$$\langle 1_q|S|0\rangle = \sum_{p,\sigma} c^\dagger_{p-q,\sigma} c_{p,\sigma} \frac{V(-q)}{E_p - E_{p-q} - \omega_q},$$

$$\langle 0|S|1_q\rangle = \sum_{p,\sigma} c^\dagger_{p+q,\sigma} c_{p,\sigma} \frac{V(q)}{E_p - E_{p+q} + \omega_q}.$$

Jetzt berechnen wir den effektiven Hamiltonoperator als den Mittelwert in dem Grundzustand des Phononsystems ($\langle 0| \ldots |0\rangle$):

$$\tilde{H} = H_0 + \frac{1}{2}\left[H_{e-ph}, S\right].$$

Hier

$$[H_{e-ph}, S] = \sum_q |V|^2 \sum_{p,\sigma,p',\sigma'} c^\dagger_{p+q,\sigma} c_{p,\sigma} c^\dagger_{p'-q,\sigma'} c_{p',\sigma'} \left[\frac{1}{E_{p'} - E_{p'-q} - \omega_q} - \frac{1}{E_p - E_{p+q} + \omega_q}\right].$$

Wechseln wir die Variabeln $p \to p'$ und $q \to -q$ und benutzen die Symmetrie $\omega_q = \omega_{-q}$. Dann

$$[H_{e-ph}, S] = \sum_q |V|^2 \sum_{p,\sigma,p',\sigma'} c^\dagger_{p+q,\sigma} c_{p,\sigma} c^\dagger_{p'-q,\sigma'} c_{p',\sigma'} \left[\frac{1}{E_{p'} - E_{p'-q} - \omega_q} - \frac{1}{E_{p'} - E_{p'-q} + \omega_q}\right],$$

und letztendlich

$$\tilde{H} = H_0 + \sum_{q,p,\sigma,p',\sigma'} c^\dagger_{p+q,\sigma} c_{p,\sigma} c^\dagger_{p'-q,\sigma'} c_{p',\sigma'} \frac{\omega_q |V|^2}{(E_{p'} - E_{p'-q})^2 - \omega_q^2}.$$

Die effektive Wechselwirkung ist , wenn $|E_{p'} - E_{p'-q}| < \omega_q$.

2. Cooper-Problem:

Analog zur Vorlesung wählen wir als Grundzustand

$$|\Psi\rangle = \sum_{-\hbar\omega_D<\epsilon_k} \alpha(k)\chi(\sigma_1,\sigma_2)c_{k,\sigma_1}c_{-k,\sigma_2}|\Psi_0\rangle + \sum_{\epsilon_k<\hbar\omega_D} \alpha(k)\chi(\sigma_1,\sigma_2)c^\dagger_{k,\sigma_1}c^\dagger_{-k,\sigma_2}|\Psi_0\rangle \quad (2)$$

wobei $|\Psi_0\rangle = \prod_{k\le k_F} c^\dagger_{k,\sigma}|0\rangle$ den voll gefüllten Fermi-See darstellt.

Im Unterschied zur Vorlesung enthält (2) ausser Elektron-artigen auch Loch-artige Quasiteilchen und wir messen die Energie direkt relativ zur Fermikante $E_F = 0$. Die weitere Argumentation orientiert sich direkt am Vorlesungsskript und läuft komplett analog zum dortigen Beispiel.

Einsetzen des Ansatzes in die Schrödingergleichung $E|\Psi\rangle = (H_0 + H_{el-el-ph})|\Psi\rangle$ liefert

$$(2\epsilon_k - E)\,\alpha(k) = \frac{g}{V}\sum_{-\hbar\omega_D<\epsilon_{k_1}<\hbar\omega_D} \alpha(k_1)\,,$$

wobei jetzt $\alpha(k)$ für $\epsilon_k < 0$ Loch-Anregungen und für $\epsilon_k > 0$ Teilchen-Anregungen beschreibt.

Wir machen wieder den Ansatz

$$C = \frac{1}{V}\sum_{-\hbar\omega_D<\epsilon_{k_1}<\hbar\omega_D} \alpha(k)\,,$$

setzen diesen selbstkonsistent ein und erhalten die Gleichung für E

$$1 = \int_{-\hbar\omega_D}^{\hbar\omega_D} d\epsilon \frac{\nu(\epsilon)g}{2\epsilon - E}\,, \quad (3)$$

wobei wir schon die Summe in eine Integration überführt haben $1/V\sum_k \to \int \nu(\epsilon)d\epsilon$. Die Zustandsdichte kann in der Nähe der Fermikante durch eine Konstante genähert werden $\nu(\epsilon) \approx \nu_0$.

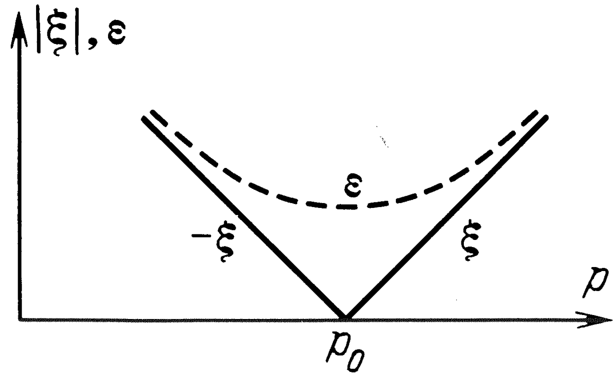

Fig. 102.

Abbildung 1: Lineare Dispersion der Quasiteilchen in der Umgebung der Fermikante p_0

Ein Blick auf die linearisierte Dispersion der Quasiteilchen in der Umgebung der Fermikante (Fig. 1) zeigt, dass die Integration (5) dasselbe Ergebnis wie in der Vorlesung ergibt, multipliziert mit dem Faktor 2. Wir erhalten also

$$\frac{1}{g\nu_0} = \ln \frac{\hbar\omega_D - E/2}{-E/2}$$

und damit für die Energielücke $E = -2\Delta$

$$\Delta = \hbar\omega_D e^{-\frac{1}{g\nu_0}} \, .$$

Die Zustandsdichte ν_0 ist hier die Zustandsdichte pro Spin!