

Theorie der Kondensierten Materie I WS 2018/2019

Prof. Dr. A. Shnirman

Blatt 5

PD Dr. B. Narozhny, M.Sc. T. Ludwig

Lösungsvorschlag

1. De Haas - Van Alphen Effekt im sehr hohen Magnetfeld:

Wir nehmen an, das Magnetfeld zeigt in z -Richtung. Dann ist nur die Dichte der Zustände in der xy -Ebene von Interesse, da die Zustände in der z -Richtung nicht vom Magnetfeld beeinflusst werden.

Aus den vorhergehenden Rechnungen kennen wir die Anzahl der Zustände pro Landaullevel $N_{LL} = eBA/(2\pi c)$ mit $A = L_x L_y$, der Fläche in der xy -Ebene. Die Energie der Landaullevels ist gegeben durch (wir vernachlässigen wieder den k_z Anteil) $E_{LL} = \omega_c(n + 1/2)$.

Wir befinden uns bei $T = 0$, die freie Energie ist dann $F = U - TS = U$.

(a) *Nur niedrigstes Niveau besetzt*

Wir nehmen eine konstante Ladungsträgerdichte $n_0 = N_0/A$ an. Für sehr hohes Magnetfeld ist die Besetzungszahl der Landaullevels sehr groß. Für $N_0 < N_{LL}$ ist nur das unterste Landaullevel besetzt und die freie Energiedichte ist einfach

$$f_0 = F/A = \omega_c n_0 / 2,$$

mit der Zyklotronfrequenz $\omega_c = eB/(m^*c)$.

Die Magnetisierung ist dann

$$m_0 = M/V = -\frac{\partial f_0}{\partial B} = -\frac{en_0}{2m^*c} = \text{const.}$$

(b) *Zwei besetzten Landau-Niveaus*

Wenn wir das Magnetfeld verringern, sinkt der Entartungsgrad der Landaullevels. Sobald $N_0 > N_{LL}$ wird das zweite Landaullevel besetzt. Das passiert genau bei $B_{c,1} = n_0/p$ mit $p = e/(2\pi c)$.

Die freie Energiedichte folgt dann

$$f_1 = \omega_c n_{LL} / 2 + 3\omega_c (n_0 - n_{LL}) / 2 = \omega_c [3n_0 / 2 - n_{LL}(B)],$$

und die Magnetisierung

$$m_1 = -\frac{e}{2m^*c} (3n_0 - 4pB)$$

Man sieht, dass die Magnetisierung bei der kritischen Feldstärke $B_{c,1}$, bei der gerade das zweite Landaullevel besetzt wird, einen Sprung hat:

$$m_0(B_{c,1}) = -an_0 \neq m_1(B_{c,1}) = an_0,$$

mit $a = e/(2m^*c)$.

(c) *Nächstes Landau-Niveau*

Wir wiederholen die Rechnung für Besetzung des dritten Landaulevels bei $B_{c,2} = n_0/(2p)$:

$$f_2 = \omega_c(5n_0/2 - 3n_{LL}); \quad m_2 = -a(5n_0 - 12pB).$$

Die Magnetisierung zeigt also Sprünge bei $B_c = n_0/(kp)$ mit $k = 1, 2, \dots$

Die Abbildung 1 zeigt den qualitativen Verlauf.

The de Haas-van Alphen effect

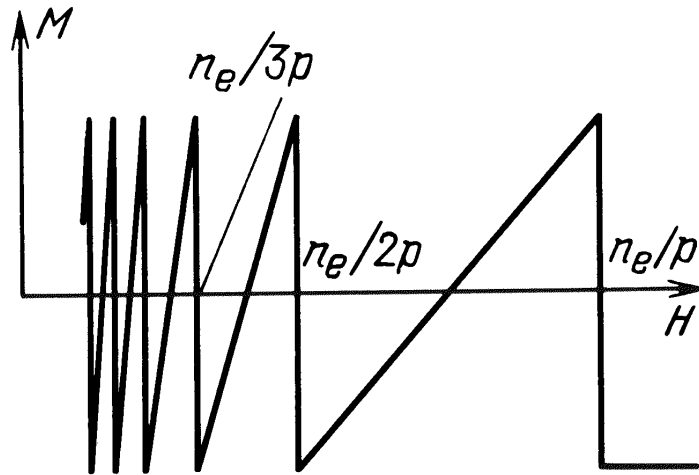


Fig. 60.

Abbildung 1: Magnetisierung als Funktion des Magnetfeldes, für hohe Magnetfelder

2. Berry-Zusammenhang für Spin-1/2:

Erst, schreiben wir die Matrix R^{-1} in Matrixform

$$R^{-1} = e^{-i\varphi\sigma_z/2} e^{-i\vartheta\sigma_y/2} e^{-i\psi\sigma_z/2} = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta/2)e^{-i(\varphi+\psi)/2} & -\sin(\vartheta/2)e^{-i(\varphi-\psi)/2} \\ \sin(\vartheta/2)e^{i(\varphi-\psi)/2} & \cos(\vartheta/2)e^{i(\varphi+\psi)/2} \end{pmatrix}$$

Die inverse Matrix ist dann

$$R = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta/2)e^{i(\varphi+\psi)/2} & \sin(\vartheta/2)e^{-i(\varphi-\psi)/2} \\ -\sin(\vartheta/2)e^{i(\varphi-\psi)/2} & \cos(\vartheta/2)e^{-i(\varphi+\psi)/2} \end{pmatrix} = e^{i\psi\sigma_z/2} e^{i\vartheta\sigma_y/2} e^{i\varphi\sigma_z/2}$$

Um die Ableitung zu eberechnen, kann man beide Forme benutzen. In Matrixform erhalten wir

$$\begin{aligned} \dot{R} &= \frac{\dot{\vartheta}}{2} \begin{pmatrix} -\sin(\vartheta/2)e^{i(\varphi+\psi)/2} & \cos(\vartheta/2)e^{-i(\varphi-\psi)/2} \\ -\cos(\vartheta/2)e^{i(\varphi-\psi)/2} & -\sin(\vartheta/2)e^{-i(\varphi+\psi)/2} \end{pmatrix} \\ &\quad + \frac{i}{2} \begin{pmatrix} (\dot{\varphi} + \dot{\psi}) \cos(\vartheta/2)e^{i(\varphi+\psi)/2} & -(\dot{\varphi} - \dot{\psi}) \sin(\vartheta/2)e^{-i(\varphi-\psi)/2} \\ -(\dot{\varphi} - \dot{\psi}) \sin(\vartheta/2)e^{i(\varphi-\psi)/2} & -(\dot{\varphi} + \dot{\psi}) \cos(\vartheta/2)e^{-i(\varphi+\psi)/2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Letztendlich, finden wir

$$i\dot{R}R^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \varphi) & (i\dot{\vartheta} + \dot{\varphi} \sin \vartheta)e^{i\psi} \\ -(i\dot{\vartheta} - \dot{\varphi} \sin \vartheta)e^{-i\psi} & \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \varphi \end{pmatrix}$$

Der diagonale Teil dieser Matrix entspricht die Berry-Phase.

3. Fermionische Kette:

(a) *Die Impulsdarstellung*

Wir betrachten das Modell auf einen unendlichen Intervall

$$\mathcal{H} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [J_1 a_n^\dagger a_{n+1} + J_2 a_n a_{n+1} + h.c. - 2B a_n^\dagger a_n].$$

Führen wir die Fourier-Transformation ein

$$a_n = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} e^{ikn} a_k.$$

Dann

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^\dagger a_{n+1} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk_1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk_2}{2\pi} a_{k_1}^\dagger a_{k_2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-ik_1 n} e^{ik_2(n+1)} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk_1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk_2}{2\pi} a_{k_1}^\dagger a_{k_2} e^{ik_2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-ik_1 n} e^{ik_2 n}.$$

Hier verwenden wir die Summe

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-ik_1 n} e^{ik_2 n} = 2\pi \delta(k_1 - k_2).$$

Damit erhalten wir

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^\dagger a_{n+1} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} a_k^\dagger a_k e^{ik}.$$

Ebenso

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n a_{n+1} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk_1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk_2}{2\pi} a_{k_1} a_{k_2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{ik_1 n} e^{ik_2(n+1)} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} a_k a_{-k} e^{-ik},$$

und

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^\dagger a_{n+1}^\dagger = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk_1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk_2}{2\pi} a_{k_1}^\dagger a_{k_2}^\dagger \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-ik_1 n} e^{-ik_2(n+1)} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} a_{-k}^\dagger a_k^\dagger e^{-ik},$$

Der Hamilton-Operator ist nun

$$\mathcal{H} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \left[J_1 a_k^\dagger a_k (e^{ik} + e^{-ik}) + J_2 (a_k a_{-k} e^{-ik} - a_{-k}^\dagger a_k^\dagger e^{-ik}) - 2B a_k^\dagger a_k \right].$$

Verwenden wir jetzt eine Variablensubstitution, $k \rightarrow -k$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} a_k a_{-k} e^{-ik} = - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} a_k a_{-k} e^{ik}.$$

Damit

$$\mathcal{H} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \left[2J_1 \cos k a_k^\dagger a_k - iJ_2 \sin k (a_k a_{-k} - a_{-k}^\dagger a_k^\dagger) - 2B a_k^\dagger a_k \right].$$

Das Ergebnis kann man in der Matrix-Form schreiben

$$\mathcal{H} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \left[(a_k^\dagger \quad a_{-k}) \begin{pmatrix} J_1 \cos k - B & -iJ_2 \sin k \\ iJ_2 \sin k & -J_1 \cos k + B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_k \\ a_{-k}^\dagger \end{pmatrix} + J_1 \cos k - B \right].$$

(b) Finden Sie das Spektrum des Modells.

Das Anregungsspektrum des Modells ist durch die Eigenwerte des Hamilton-Operators:

$$\lambda^2 - (J_1 \cos k - B)^2 - J_2^2 \sin^2 k = 0,$$

deswegen

$$\lambda_{\pm} = \pm \sqrt{(J_1 \cos k - B)^2 + J_2^2 \sin^2 k}.$$

Der diagonalisierte Hamilton-Operator ist

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \left[(c_k^\dagger \quad c_{-k}) \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_k \\ c_{-k}^\dagger \end{pmatrix} + J_1 \cos k - B \right] = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \left[E_k c_k^\dagger c_k - E_k/2 + J_1 \cos k - B \right], \end{aligned}$$

wobei die Anregungsenergien (das Anregungsspektrum) ist

$$E_k = 2\lambda_+ = 2\sqrt{(J_1 \cos k - B)^2 + J_2^2 \sin^2 k}.$$

Die Grundzustandsenergie ist

$$E_0 = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} (J_1 \cos k - B - E_k/2) = -B - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \sqrt{(J_1 \cos k - B)^2 + J_2^2 \sin^2 k}.$$