

Theorie der Kondensierten Materie I WS 2018/2019**Prof. Dr. A. Shnirman****Blatt 1****PD Dr. B. Narozhny, M.Sc. T. Ludwig****Besprechung 24.10.2018****1. Reziprokes Gitter:****(30 Punkte)**

- (a) Beweisen Sie, dass das reziproke Gitter eines reziproken Gitters wieder das ursprüngliche, reale Gitter ist. (10 Punkte)
- (b) Konstruieren Sie explizit das reziproke Gitter des flächenzentrierten kubischen (fcc) Gitters. (10 Punkte)
- (c) Bestimmen Sie das reziproke Gitter des zweidimensionalen Honigwabengitters. Konstruieren Sie daraus die erste Brillouin-Zone von Graphen. (10 Punkte)

2. Korrelationsfunktionen im idealen Fermigas:**(70 Punkte)**

Betrachten Sie ein System von N nichtwechselwirkenden Fermionen im Grundzustand $|\Psi_0\rangle$. Das System findet sich im 3D-Volumen V . Man kann den Dichte-Operator für Teilchen mit z -Komponente des Spins σ durch die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren ausdrücken:

$$\hat{n}(\mathbf{r}, \sigma) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{r}} a_{\mathbf{k}, \sigma}^\dagger a_{\mathbf{k}', \sigma}.$$

Der Operator $a_{\mathbf{k}, \sigma}^\dagger$ vergrößert die Zahl der Teilchen im Zustand mit $\mathbf{k}$ und σ um 1. Der Operator $a_{\mathbf{k}, \sigma}$ vermindert die Zahl der Teilchen in diesem Zustand um 1. Die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren erfüllen die Anti-Kommutator-Vertauschungsrelationen:

$$\{\hat{a}_{\mathbf{k}, \sigma}, \hat{a}_{\mathbf{k}', \sigma'}\} = \{\hat{a}_{\mathbf{k}, \sigma}^\dagger, \hat{a}_{\mathbf{k}', \sigma'}^\dagger\} = 0, \quad \{\hat{a}_{\mathbf{k}, \sigma}^\dagger, \hat{a}_{\mathbf{k}', \sigma'}\} = \delta_{\sigma, \sigma'} \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}}.$$

Den Grundzustand des freien Fermi-Gases kann man wie folgt darstellen:

$$|\Psi_0\rangle = \prod_{|\mathbf{k}| < k_F, \sigma} \hat{a}_{\mathbf{k}, \sigma}^\dagger |0\rangle,$$

wobei alle Impulse (bei $k = 0$ beginnend) bis k_F aufgefüllt werden.

- (a) Zeigen Sie, dass der “Fermi-Impuls” in 3 Dimensionen gegeben ist durch

$$k_F = (3\pi^2 n)^{1/3},$$

wobei

$$n = \frac{N}{V} = \sum_{\sigma} \langle \Psi_0 | \hat{n}(\mathbf{r}, \sigma) | \Psi_0 \rangle,$$

die Teilchendichte ist.

(10 Punkte)

(b) Wir führen jetzt die fermionischen Feldoperatoren an:

$$\hat{\psi}_{\sigma}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \hat{a}_{\mathbf{k},\sigma}, \quad \hat{\psi}_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \hat{a}_{\mathbf{k},\sigma}^{\dagger},$$

deren Wirkung sehr intuitiv ist: $\hat{\psi}_{\sigma}(\mathbf{r})$ vernichtet ein Teilchen mit Spin σ bei $\mathbf{r}$, während $\hat{\psi}_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{r})$ ein Teilchen mit Spin σ bei $\mathbf{r}$ erzeugt. Zeigen Sie, dass diese Feldoperatoren die kanonischen Anti-Vertauschungsrelationen erfüllen:

$$\{\hat{\psi}_{\sigma}(\mathbf{r}), \hat{\psi}_{\sigma'}^{\dagger}(\mathbf{r}')\} = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta_{\sigma,\sigma'}.$$

(10 Punkte)

(c) Die Ein-Teilchen Korrelationsfunktion ist wie folgt definiert:

$$G_{\sigma}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \langle \Psi_0 | \hat{\psi}_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{r}) \hat{\psi}_{\sigma}(\mathbf{r}') | \Psi_0 \rangle.$$

Diese Korrelationsfunktion kann man interpretieren als Wahrscheinlichkeitsamplitude, ein Elektron mit Spin σ bei $\mathbf{r}'$ zu vernichten und bei $\mathbf{r}$ wieder zu erzeugen. Zeigen Sie, dass gilt

$$G_{\sigma}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{3n}{2} \frac{\sin x - x \cos x}{x^3}, \quad x = k_F |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|.$$

Hinweis Benutzen Sie Fouriertransformation.

(15 Punkte)

(d) Die Zwei-Teilchen Korrelationsfunktion gibt die Wahrscheinlichkeit an, ein Teilchen mit Spin σ' bei $\mathbf{r}'$ zu finden, wenn sich bei $\mathbf{r}$ bereits ein Teilchen mit Spin σ befindet. Sie ist wie folgt definiert:

$$g_{\sigma,\sigma'}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{4}{n^2} \langle \Psi_0 | \hat{n}(\mathbf{r}, \sigma) \hat{n}(\mathbf{r}', \sigma') | \Psi_0 \rangle = \frac{4}{n^2} \langle \Psi_0 | \hat{\psi}_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{r}) \hat{\psi}_{\sigma'}^{\dagger}(\mathbf{r}') \hat{\psi}_{\sigma'}(\mathbf{r}') \hat{\psi}_{\sigma}(\mathbf{r}) | \Psi_0 \rangle.$$

Zeigen Sie, dass im Falle $\sigma \neq \sigma'$ gilt (für beliebige $\mathbf{r}$ und $\mathbf{r}'$)

$$g_{\sigma,\sigma'}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = 1.$$

(10 Punkte)

(e) Zeigen Sie nun, dass sich im Falle $\sigma = \sigma'$ die Zwei-Teilchen Korrelationsfunktion durch die Ein-Teilchen Korrelationsfunktion ausdrücken lässt,

$$g_{\sigma,\sigma'}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = 1 - \frac{4}{n^2} [G_{\sigma}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')]^2.$$

Vergleichen Sie dieses Ergebnis mit dem Ergebnis von Aufgabenteil d) und überlegen Sie sich, was das ganze mit dem Pauli-Prinzip zu tun hat.

(15 Punkte)

(f) Um sich das Pauli-Prinzip zu verdeutlichen, berechnen Sie folgendes Integral:

$$\frac{n}{2} \int d^3r [g_{\sigma,\sigma'}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - 1] .$$

Wie interpretieren Sie das Ergebnis?

(10 Punkte)