Theorie der Kondensierten Materie I WS 2018/19

Prof. Dr. A. Shnirman
PD Dr. B. Narozhny, M.Sc. T. Lüdwig

Blatt 12
Besprechung 23.01.2019

---

1. Effektive Elektron-Elektron Wechselwirkung, Schrieffer-Wolf-Transformation (50 Punkte)

In dieser Aufgabe soll die, durch Elektron-Phonon Wechelwirkung hervorgerufene, effektive Elektron-Elektron Wechselwirkung mit Hilfe einer kanonischen Transformation (Schrieffer-Wolf-Transformation) hergeleitet werden. Die Form der Wechselwirkung sollte aus der Vorlesung bekannt sein, wo sie mit anderen Mitteln hergeleitet wurde.

(a) Eine kanonische Transformation eines Operators H ist definiert durch

$$\tilde{H} = e^{-S} H e^{S}$$

Zeigen sie, dass die obige Form äquivalent ist zu

$$\tilde{H} = H + [H, S] + \frac{1}{2}\left[[H, S], S\right] + ...$$

(b) Wir betrachten nun einen Hamiltonoperator H_0 mit einer kleinen Störung V

$$H = H_0 + V$$

Die Idee der kanonischen Transformation ist nun, den Operator S so zu wählen, dass der transformierte Hamiltonoperator $\tilde{H}$ keine Terme mehr enthält, die linear in der Störung V sind.
Zeigen sie, dass diese Bedingung der Forderung

$$V + [H_0, S] = 0$$

entspricht.

(c) Benutzen sie die Eigenzustände des ungestörten Hamiltonoperators $\langle n|$ und zeigen sie, dass S geschrieben werden kann als

$$\langle n|S|m\rangle = \frac{\langle n|V|m\rangle}{E_m - E_n}$$

Zeigen sie schliesslich, dass für den transformierten Hamiltonoperator nun gilt

$$\tilde{H} = H_0 + \frac{1}{2}[V, S] + O(V^3)$$

(d) Betrachten wir jetzt den Frölich Hamiltonoperator, der die Elektron-Phonon-WW beschreibt, als Störung

$$H_{e-ph} = \sum_{p,q,\sigma} V(q) c^\dagger_{p+q,\sigma} c_{p,\sigma} \left(a_q + a^\dagger_{-q} \right).$$

mit den Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren für Elektronen c, $c^\dagger$ und Phononen a, $a^\dagger$ ($a_q + a^\dagger_{-q} \propto u(q)$, wobei u die Verschiebung der Ionen ist).

Berechnen sie mit Hilfe einer kanonischen Transformation den effektiven Hamiltonoperator. Werten sie dazu die die Matrixelemente von S bezüglich der Phononzustände aus. Da wir am Tieftemperaturverhalten interessiert sind, sind nur die Matrixelemente mit dem $T = 0$ Grundzustand $|0\rangle$ wichtig. Die Korrektur zum ungestörten Hamiltonoperator kann dann als effektive Elektron-Elektron-Wechselwirkung geschrieben werden.

2. Cooper-Problem:

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass Elektronen im Beisein des Fermisee's auch bei verschwindend kleiner attraktiver Wechselwirkung immer noch gebunden Paare bilden können.

Das Beispiel der Vorlesung soll hier erweitert werden, indem zusätzlich zu den Elektronen oberhalb der Fermikante auch Löcher unterhalb der Fermikante betrachtet werden.

Die Wechselwirkung wird vereinfacht zu

$$g_{k,q} = \begin{cases} -g & |\epsilon_k - \epsilon_{k-q}| \leqslant \omega_D \\ 0 & |\epsilon_k - \epsilon_{k-q}| > \omega_D \end{cases}$$

dh. in einem Intervall der Breite $2\omega_D$ ist die Wechselwirkung konstant und anziehend und verschwindet überall sonst. Die Dispersion der Quasiteilchen wird in der Umgebung der Fermikante als linear genähert.

Berechnen sie analog zur Vorlesung die Energie des Zustandes mit zwei Quasiteilchen (Elektronen oder Löcher) und finden sie daraus die Bindungsenergie Δ pro Quasiteilchen.