

Theorie der Kondensierten Materie I WS 2018/2019

Prof. Dr. A. Shnirman

Blatt 5

PD Dr. B. Narozhny, M.Sc. T. Ludwig

Besprechung 21.11.2018

1. De Haas - Van Alphen Effekt im sehr hohen Magnetfeld: (40 Punkte)

In der Vorlesung haben wir im großkanonischen Ensemble besprochen, in dem die Teilchenzahl N variabel ist. Im Experiment wird die Dichte der Ladungsträger jedoch konstant sein.

Im Folgenden nehmen wir eine konstante Dichte N_0 der Ladungsträger an und wollen im kanonischen Ensemble rechnen. Wir betrachten den stark quantenmechanischen Grenzfall, in dem nur wenige Landaulevels besetzt sind.

- (a) Wir nehmen zuerst an, das Magnetfeld sehr stark ist und die Temperatur $T = 0$. Berechnen sie die freie Energiedichte F/V und daraus die Magnetisierungsdichte M/V für den Fall, daß sich alle Elektronen im niedrigsten Landaulevel aufhalten.
- (b) Wenn wir die Stärke des Magnetfeldes nun verringern, vermindert sich der Entartungsgrad der Landaulevels. Ab einer kritischen Magnetfeldstärke $B_{c,1}$ ist das unterste LL voll besetzt und das zweite Landaulevel wird besetzt. Berechnen sie für diesen Fall wieder freie Energiedichte F/V und Magnetisierungsdichte M/V .
- (c) Wiederholen sie die Rechnung auch für die Besetzung des nächsten LL. Skizzieren sie den Verlauf der Magnetisierungsdichte als Funktion des externen Magnetfeldes.

2. Berry-Zusammenhang für Spin-1/2: (30 Punkte)

In der Vorlesung haben Sie die zeitabhängige, unitäre Matrix $R(t)$ eingeführt, die den Basis-Wechsel zur instantanen Eigenbasis ergibt.

Berechnen Sie nun den sogenannten Berry-Zusammenhang

$$i\dot{R}R^{-1},$$

wobei

$$R^{-1}(t) = e^{-i\varphi(t)\sigma_z/2} e^{-i\theta(t)\sigma_y/2} e^{-i\psi(t)\sigma_z/2}.$$

3. Fermionische Kette:

(30 Punkte)

In dieser Aufgabe berechnen wir das Spektrum von spinlosen Elektronen auf einem eindimensionalen Gitter. Der Hamiltonian lautet

$$\mathcal{H} = \sum \left[J_1 a_i^\dagger a_{i+1} + J_2 a_i a_{i+1} + h.c. - 2B a_i^\dagger a_i \right].$$

Der Hamiltonian beschreibt, z. B., ein 1D magnetisches System (das so-genannten XY-Modell).

- (a) Führen Sie die Impulsdarstellung ein.
- (b) Finden Sie das Spektrum des Modells.

Hinweis: Diagonalisieren Sie den Hamiltonian mithilfe einer Rotation (die Bogolyubov-Transformation).