Karlsruher Institut für Technologie | Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Theorie der Kondensierten Materie I WS 2018/2019

Prof. Dr. A. Shnirman
PD Dr. B. Narozhny, M.Sc. T. Ludwig

Blatt 8
Besprechung 12.12.2018

---

1. Operatoren in zweiter Quantisierung: (60 Punkte)

In der Vorlesung wurde die Darstellung bosonischer Einteilchenoperatoren $\hat{F}^{(1)}$ in zweiter Quantisierung hergeleitet. Demnach ist $\hat{F}^{(1)} = \sum_a \hat{f}^{(1)}_{x_a}$ (Operator $\hat{f}^{(1)}_{x_a}$ wirkt auf Korrdinate x_a) identisch zu

$$\hat{F}^{(1)} = \sum_{ij} \langle i|\hat{f}^{(1)}|j\rangle\, \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_j,$$

mit den Einteilchenzuständen $|i\rangle$. Die Diagonalelemente der bosonischen Operatoren waren hierbei gegeben durch

$$\langle N_1, N_2, \ldots |\hat{F}^{(1)}|N_1, N_2, \ldots\rangle = \sum_i N_i \langle i|\hat{f}^{(1)}|i\rangle, \tag{1}$$

und die Nicht-Diagonalelemente durch

$$\langle \ldots, N_i, \ldots, N_j - 1, \ldots |\hat{F}^{(1)}| \ldots, N_i - 1, \ldots, N_j, \ldots\rangle = \sqrt{N_i N_j}\, \langle i|\hat{f}^{(1)}|j\rangle. \tag{2}$$

Die symmetrischen bosonischen Wellenfunktionen sind definiert durch

$$|N_1, N_2, ...\rangle = \left(\frac{N_1!N_2!\ldots}{N!}\right)^{1/2} \sum_P \phi_{P_1}(x_1)\phi_{P_2}(x_2)\ldots\phi_{P_N}(x_N)$$

mit $N = \sum_i N_i$ und den Einteilchenwellenfunktionen $\phi_i(x_i)$ im Zustand i.

Analog zu den Einteilchenoperatoren können bosonische Zweiteilchenoperatoren $\hat{F}^{(2)}$ in zweiter Quantisierung dargestellt werden durch

$$\hat{F}^{(2)} = \frac{1}{2} \sum_{iklm} \langle ik|\hat{f}^{(2)}|lm\rangle\, \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_m \hat{a}_l\ . \tag{3}$$

mit den Matrixelementen

$$\langle ik|\hat{f}^{(2)}|lm\rangle = \iint dx_1\, dx_2\, \phi_i^\star(x_1)\, \phi_k^\star(x_2)\, \hat{f}^{(2)}\, \phi_l(x_1)\, \phi_m(x_2)\ .$$

Leiten Sie aus $\hat{F}^{(2)} = \sum_{a<b} f^{(2)}_{ab}$ (Operator wirkt auf Koordinaten x_a und x_b) die Form (3) her. Finden Sie dazu die zu Gln. (1) und (2) analogen Ausdrücke für Zweiteilchenoperatoren. Unterscheiden Sie, ob $f^{(2)}$ zweimal auf den gleichen Einteilchenzustand oder auf zwei unterschiedliche Einteilchenzustände wirkt.

2. Thermodynamische Störungstheorie: (40 Punkte)

Betrachten Sie ein Gas spinloser Bosonen der Masse m in einem Volumen $V = L^3$, mit periodischen Randbedingungen für die Wellenfunktionen. Nehmen Sie an, dass die Teilchen über ein Potential $U(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) = U_0 \delta(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)$ mit $U_0 > 0$ paarweise wechselwirken. Ausgedrückt in zweiter Quantisierung hat der Wechselwirkungsteil des Hamiltonoperators ($\widehat{H} = \widehat{H}_0 + \widehat{U}$) dann die Form

$$\widehat{U} = \frac{U_0}{2V} \sum_{\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2, \boldsymbol{k}_3, \boldsymbol{k}_4} \delta_{\boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{k}_2 - \boldsymbol{k}_3 - \boldsymbol{k}_4} \, \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}_3} \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}_4} \hat{a}_{\boldsymbol{k}_2} \hat{a}_{\boldsymbol{k}_1} .$$

Das chemische Potential μ und die Temperatur T seien vorgegeben.

(a) Betrachten Sie $\widehat{U}$ als kleine Störung und zeigen Sie, dass die Korrektur erster Ordnung in U_0 zum großkanonischen Potential gegeben ist durch

$$\delta\Omega = \langle \widehat{U} \rangle_{H_0} = \frac{\operatorname{tr}\left\{ \widehat{U} e^{-\beta\left(\widehat{H}_0 - \mu \widehat{N}\right)} \right\}}{\operatorname{tr}\left\{ e^{-\beta\left(\widehat{H}_0 - \mu \widehat{N}\right)} \right\}} .$$

Hinweis: Benutzen Sie die zeitunabhängige Störungstheorie der Quantenmechanik.

(b) Berechnen Sie $\delta\Omega$. Im relevanten Matrixelement können entweder zwei Bosonen in unterschiedlichen Zuständen $\boldsymbol{k}_1 \neq \boldsymbol{k}_2$ oder im gleichen Zustand $\boldsymbol{k}_1 = \boldsymbol{k}_2$ erzeugt werden, betrachten Sie diese beiden Fälle separat.